Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2022»
Заключительный тур
13 марта 2022 года
8 класс

▷ **1.** Какая фраза зашифрована в 47-значном числе 32181011121516181691634615101156261022181631210, если каждая буква заменена её номером в алфавите русского языка?

Решение:

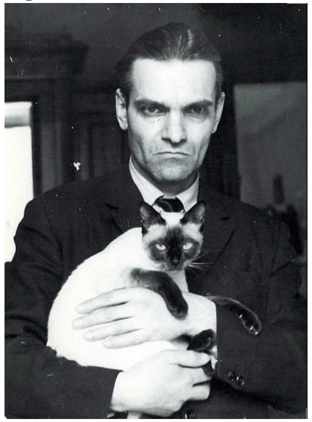
1	а	12	к	23	х
2	б	13	л	24	ц
3	в	14	м	25	ч
4	г	15	н	26	ш
5	д	16	о	27	щ
6	е	17	п	28	ъ
7	ё	18	р	29	ы
8	ж	19	с	30	ь
9	з	20	т	31	э
10	и	21	у	32	ю
11	й	22	ф	33	я

Подставим там, где нет других выборов

3218	10	111215	16	18	16	9	16	3	4	6	15	10	115	6	26	10	2218	16	312	10
	и		о	р	о	з	о	в	г	е	н	и		е	ш	и		о		и

Остальное подставляем методом подбора Ответ: Юрий Кнорозов гений дешифровки.

Примечание:



Юрий Валентинович Кнорозов — советский и российский историк, этнограф, лингвист и эпиграфист, переводчик, основатель советской школы майянистики.

В 1948 году окончил исторический факультет МГУ. Проблемой письменности майя заинтересовался ещё будучи студентом, вопреки общему скептическому настрою. «То, что создано одним человеческим умом не может не быть разгадано другим. С этой точки зрения, неразрешимых проблем не существует и не может существовать ни в одной из областей науки!», считал он.

Первая публикация результатов дешифровки, вышедшая все в той же Советской Этнографии в 1952 г., со скромным названием «Древняя письменность Центральной Америки», произвела настоящий фурор. Гениальное открытие Кнорозова было с восторгом принято отечественной научной общественностью. Защита проходила в Москве 29 марта 1955 г. Результатом - стало присвоение звания не кандидата, а доктора исторических наук, что в гуманитарной области происходит крайне редко.

Защита диссертации по индейцам майя стала научной и культурной сенсацией в Советском Союзе, очень быстро о дешифровке узнали и за рубежом. Казалось парадоксом - ни разу не побывав в Мексике, советский исследователь сделал то, чего не добились многие ученые разных стран, годами проводившие полевые исследования среди индейцев майя. Единственной поездкой Ю.В.Кнорозова за рубеж (вплоть до 1990 г.) стало участие в Международном конгрессе американистов в Копенгагене в 1956 г., куда Кнорозов попал лишь благодаря настояниям академика А.П. Окладникова.

Ссылка: http://knorosov.com/

▷ **2.** Сколько существует таких троек натуральных двузначных чисел (a, b, c), что
$$a^4 + 2b^4 + c^4 + ac(a^2 + c^2) \leqslant 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)?$$

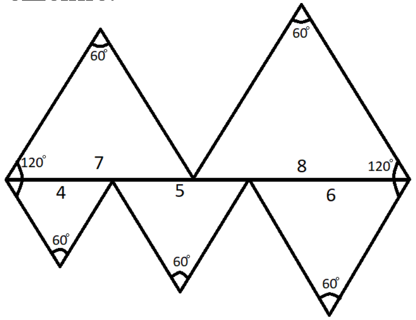
Решение:

$$(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (b^4 - 2b^2c^2 + c^4) + ac(a^2 - 2ac + c^2) \leqslant 0$$
$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + ac(a - c)^2 \leqslant 0$$
$$a = b = c = \overline{10, 99}$$

- 90 двузначных чисел. **Ответ:** 90 наборов чисел.

▷ **3.** Существует ли десятиугольник, который можно разрезать на пять неравных равносторонних треугольников, площади которых относятся как квадраты пяти последовательных чисел?

Решение:



$$S_1 : S_2 : S_3 : S_4 : S_5 = 4^2 : 5^2 : 6^2 : 7^2 : 8^2$$

▷ **4.** На отрезке RG симметрично относительно середины расположены 2022 точки. Краснов выбирает случайным образом 1011 точек и красит их в красный цвет, а Зеленов красит оставшиеся точки в зелёный цвет. Вычисляют d_1 – сумму расстояний от всех красных точек до R, и d_2 – сумму расстояний от всех зелёных точек до G. Какова вероятность того, что а) $d_1 > d_2$, б) $d_1 < d_2$, в) $d_1 = d_2$?

Решение: Пусть красная точка C и синяя точка D расположены по разные стороны от середины K отрезка AB; если мы их перекрасим, то рассматриваемые суммы расстояний d_1 и d_2 обе увеличатся на одно и то же число $\mid CD \mid$, так что разность $d_1 - d_2$ не изменится. Таким перекрашиванием точек мы можем добиться того, что все красные точки будут лежать по одну сторону от середины K, а синие точки - по другую сторону от K. Но в этом случае из симметричности расположения точек следует, что $d_1 = d_2$, и поскольку в процессе перекрашивания разность $d_1 - d_2$ не изменялась, то и при исходной раскраске точек эти суммы были равны, следовательно, вероятность того, что $d_1 = d_2$, равна 1.
Ответ: 1.

▷ **5.** На доске была записана обыкновенная несократимая дробь, числитель и знаменатель которой – натуральные числа. К её знаменателю прибавили числитель, получилась новая дробь. К числителю прибавили знаменатель, получилась третья дробь. К знаменателю третьей дроби прибавили числитель, получилась четвёртая дробь, к числителю которой прибавили её знаменатель и, наконец, к знаменателю последней дроби прибавили её числитель, получилась дробь $\frac{49}{80}$. Какая дробь была написана на доске?

Решение:

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{m+n} = \frac{2m+n}{m+n} = \frac{2m+n}{3m+2n} = \frac{5m+3n}{3m+2n} = \frac{5m+3n}{8m+5n} = \frac{49}{80}$$

$$400m + 240n = 392m + 245n$$

$$8m = 5n$$

$$m = 5, n = 8$$

Ответ: $\frac{5}{8}$.

▷ **6.** Часы показывают 20 часов 22 минуты. На сколько изменится угол между часовой и минутной стрелкой через 20 часов 22 минуты?

Решение: Скорость минутной стрелки 6 градусов в минуту. Скорость часовой стрелки 0,5 градуса в минуту.
В 20 часов 22 минуты:
22 минуты $\cdot\ 6^\circ\ =\ 132^\circ$
22 минуты $\cdot\ 0,5^\circ\ =\ 11^\circ$
$\alpha = 119^\circ = (240^\circ + 11^\circ - 132^\circ$

20 ч 22 минуты $+$ 20 ч 22 минуты $=$ 4 ч 44 минуты 4 ч 44 минуты:
44 минуты $\cdot\ 6^\circ\ =\ 264^\circ$
44 минуты $\cdot\ 0,5^\circ\ =\ 22^\circ$
$\beta = 264^\circ - (120^\circ + 22^\circ) = 122^\circ$
$\delta = \beta - \alpha = 122^\circ - 119^\circ = 3^\circ$
Ответ: Увеличится на 3°.

▷ **7.** В записи многозначного числа, состоящего из одних восьмёрок, расставьте знаки сложения так, чтобы получить выражение, значение которого равно N, где N – шестизначное число, записанное с помощью трёх двоек и трёх нулей. Какое наименьшее число восьмёрок достаточно для представления чисел вида N.

Решение:
$N = 8k$, N должно делится на 8, по условию подходят лишь 3 числа: $N = 222000, 220200, 202200$
1.
$222000 = 2 \cdot 88888 + 4 \cdot 8888 + 9 \cdot 888 + 7 \cdot 88 + 8 \cdot 8$
$8 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 75$
2.
$220200 = 2 \cdot 88888 + 4 \cdot 8888 + 7 \cdot 888 + 7 \cdot 88 + 8 \cdot 5$
$5 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 66$
3.

$202200 = 2 \cdot 88888 + 2 \cdot 8888 + 7 \cdot 888 + 8 \cdot 88 + 8 \cdot 10$
$10 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 65$
Ответ: 65.

▷ **8.** Пусть $S(N)$ – сумма цифр числа N. Найти все трёхзначные числа x такие, что $S(x^k) = S^k(x), k = 2, 3, 4$.

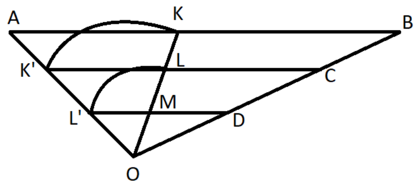
Решение: Пусть $S(x) = a$. Так как $x < 1000$, то $x^4 < 10^{12}$, т.е. x^4 не больше числа, состоящего из 12 девяток, так что $a^4 \leqslant 108$, т.е. $a \leqslant 3$. Поэтому $x \in 300; 201; 210; 102; 120; 111; 200; 101; 110; 100$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что условию задачи удовлетворяют только числа 100, 101 и 110.

▷ **9.** Даны четыре отрезка длиной a, b, c, d. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок x, длина которого равна $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$.

Решение: В треугольнике, стороны которого a и b, а угол между ними $120°$, биссектриса этого угла

$$x = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

(это следует из рассмотрения площадей треугольников: $xa \sin 60° + xb \sin 60° = ab \sin 120°$).



На сторонах угла в $120°$ откладываем

$$OA = a, OB = b, OC = c, OD = d.$$

OK - биссектриса этого угла.

$$OK = OK' = x,$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}; OL = OL' = y,$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; OM = z.$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

▷ **10.** Игра начинается с числа 0. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное от 1 до 9. Выиграет тот, кто получит число g ($g = 10^{100}$). Кто и как выиграет при правильной игре, если играют двое?

Решение: Выиграет второй игрок. Цель каждого его хода - получить число, делящееся на 10.